

$$\frac{a}{2} = 400 \Rightarrow a = 800$$

$$F_1A' = CF_1 + CA' = ae + a = \frac{a}{2} + a$$

$$= \frac{800}{2} + 800 = 400 + 800 = 1200$$

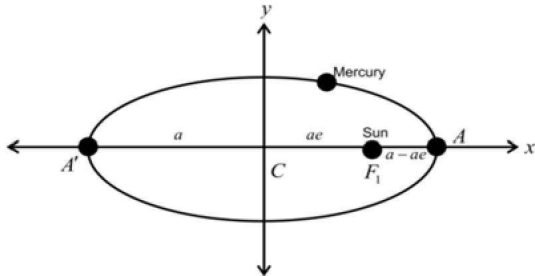
துணைக் கோளுக்குப் பூமிக்கும் இடைப்பட்ட அதிகபட்ச தூரம் தூரம் 1200 கிலோ மீட்டர்கள்.

23. சூரியன் குவியத்திலிருக்குமாறு மெர்க்குரி கிரகமானது சூரியனை ஒரு நீளப்பட்ட பாதையில் சுற்றி வருகிறது. அதன் அரை நெட்டச்சின் நீளம் 36 மில்லியன் மைல்கள் ஆகவும் மையத் தொலைவு தகவு 0.206 ஆகவும் இருக்குமாயின் (i) மெர்க்குரி கிரகமானது சூரியனுக்கு மிக அருகாமையில் வரும்போது உள்ள தூரம் (ii) மெர்க்குரி கிரகமானது சூரியனுக்கு மிகத் தொலைவில் இருக்கும் போது உள்ள தூரம் ஆகியவற்றைக் காண்க.

தீர்வு: படத்தில் சூரியனின் நிலை F_1 என்க.

$$CA = a = 36, e = 0.206$$

$$ae = 36 \times 0.206 = 7.416$$



(i) மெர்க்குரி கிரகமானது சூரியனுக்கு மிக அருகாமையில் வரும்போது உள்ள தூரம்

$$F_1A = CA - CF_1 = a - ae = 36 - 7.416 = 28.584$$

மெர்க்குரி கிரகமானது சூரியனுக்கு மிக அருகாமையில் வரும்போது உள்ள தூரம் 28.584 மில்லியன் மைல்கள்

(ii) மெர்க்குரி கிரகமானது சூரியனுக்கு மிகத் தொலைவில் இருக்கும் போது உள்ள தூரம்

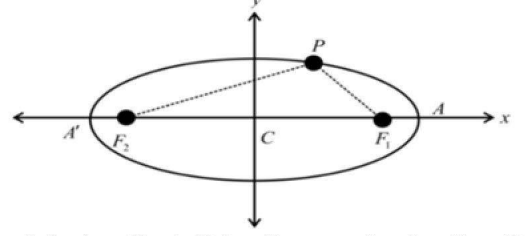
$$F_1A' = CA' + CF_1 = a + ae = 36 + 7.416 = 43.416$$

மெர்க்குரி கிரகமானது சூரியனுக்கு மிகத் தொலைவில் இருக்கும் போது உள்ள தூரம் 43.416 மில்லியன் மைல்கள்

24. ஒரு கோ-கோ விளையாட்டு வீரர் விளையாட்டுப் பயிற்சியின் போது அவருக்கும் கோ-கோ குச்சிகளுக்கும் இடையேயுள்ள தூரம் எப்பொழுதும் 8 மீ ஆக இருக்குமாறு உணர்கிறார். அவ்விரு

குச்சிகளுக்கு இடைப்பட்ட தூரம் 6 மீ எனில் அவர் ஓடும் பாதையின் சமன்பாடாகக் காண்க.

தீர்வு:



கோ-கோ குச்சிகள் இரண்டும் F_1 மற்றும் F_2 இல் அமைந்துள்ளன எனக் கொள்க. $P(x, y)$ என்ற புள்ளியானது விளையாட்டு வீரரின் நிலை எனக் கொள்க.

$$\therefore F_1P + F_2P = 2a = 8$$

$$\therefore a = 4$$

$$F_1F_2 = 2ae = 6 \Rightarrow ae = 3$$

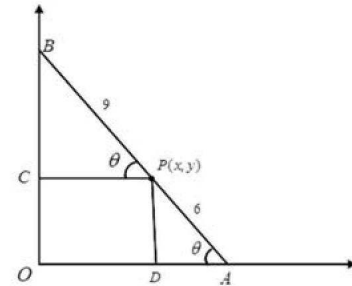
$$b^2 = a^2(1 - e^2) = a^2 - a^2e^2 = 4^2 - 3^2 = 16 - 9 = 7$$

\therefore பாதையின் சமன்பாடு

$$\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{7} = 1 \Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1}$$

25. ஒரு சமதளத்தின் மேல் செங்குத்தாக அமைந்துள்ள சுவரின் மீது 15 மீ நீளமுள்ள ஏணியானது தளத்தினையும் சுவற்றினையும் தொடுமாறு நகர்ந்து கொண்டு இருக்கிறது எனில் ஏணியின் கீழ்மட்ட முனையிலிருந்து 6 மீ தூரத்தில் ஏணியில் அமைந்துள்ள P என்ற புள்ளியின் நியமப்பாதைக் காண்க.

தீர்வு:



AB என்பது ஏணி, OA என்பது தரை, OB என்பது சுவர் என்க. $AP = 6, BP = 9$ எனும் படி AB யின் மீது $P(x, y)$ என்பது ஏதேனும் ஒரு புள்ளி என்க. $\angle OAP = \theta$ என்க.

படத்திலிருந்து

$$\cos \theta = \frac{x}{9}, \sin \theta = \frac{y}{6}$$

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1 \Rightarrow \left(\frac{x}{9}\right)^2 + \left(\frac{y}{6}\right)^2 = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{36} = 1$$

இதுவே தேவையான நியமப்பாதையாகும். இது ஒர் நீள்வட்டமாகும்.

வகை நுண்கணிதம் - பயன்பாடுகள் I

பிரிவு -அ வினா விடைகள்

வினா எண்	வினா	விடை
1	$x = 2$ இல் $y = -2x^3 + 3x + 5$ என்ற வளைவரையின் சாய்வு	-21
2	r ஆரம் கொண்ட ஒரு வட்டத்தின் பரப்பு A இல் ஏற்படும் மாறும் வீதம்	$2\pi r \frac{dr}{dt}$
3	ஆதியிலிருந்து ஒரு நேர்க்கோட்டில் x தொலைவில் நகரும் புள்ளியின் திசைவேகம் v எனவும் $a + bv^2 = x^2$ எனவும் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது, இங்கு a மற்றும் b மாறிலிகள், அதன் முடுக்கம் ஆனது	$\frac{x}{b}$
4	ஒரு உருகும் பனிக்கட்டிப் கோளத்தின் கன அளவு 1 செ.மீ. ³ / நிமிடம் எனக் குறைகின்றது. அதன் விட்டம் 10 செ.மீ. என இருக்கும் போது விட்டம் குறையும் வேகம் ஆனது	$\frac{1}{50\pi}$ செ.மீ. / நிமி
5	$y = 3x^2 + 3\sin x$ என்ற வளைவரைக்கு $x = 0$ வில் தொடுகோட்டின் சாய்வு	3
6	$y = 3x^2$ என்ற வளைவரைக்கு x இன் ஆயத்தொலைவு 2 எனக் கொண்டுள்ள புள்ளியில் செங்கோட்டின் சாய்வானது	$-\frac{1}{12}$
7	$y = 2x^2 - 6x - 4$ என்ற வளைவரையில் x -அச்சுக்கு இணையாகவுள்ள தொடுகோட்டின் தொடு புள்ளி	$(\frac{3}{2}, -\frac{17}{2})$
8	$y = \frac{x^3}{5}$ எனும் வளைவரைக்கு $(-1, -\frac{1}{5})$ என்ற புள்ளியில் தொடுகோட்டின் சமன்பாடு	$5y - 3x = 2$
9	$\theta = \frac{1}{t}$ எனும் வளைவரைக்கு புள்ளி $(-3, -\frac{1}{3})$ என்ற புள்ளியில் செங்கோட்டின் சமன்பாடு	$3\theta = 27t + 80$
10	$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ மற்றும் $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{8} = 1$ எனும் வளைவரைகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணம்	$\frac{\pi}{2}$
11	$y = e^{mx}$ மற்றும் $y = e^{-mx}, m > 1$ என்னும் வளைவரைகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணம்	$\tan^{-1}(\frac{2m}{m^2 - 1})$
12	$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ எனும் வளைவரையின் துணை அவகுச் சமன்பாடுகள்	$x = a \cos^3 \theta$ $y = a \sin^3 \theta$
13	$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ என்ற வளைவரையின் செங்கோடு x அச்சுடன் θ என்னும் கோணம் ஏற்படுத்துமெனில் அச்செங்கோட்டின் சாய்வு	$\tan \theta$
14	ஒரு சதுரத்தின் மூலை விட்டத்தின் நீளம் அதிகரிக்கும் வீதம் 0.1 செ.மீ / வினாடி, எனில் பக்க அளவு $\frac{15}{\sqrt{2}}$ செ.மீ ஆக இருக்கும் போது அதன் பரப்பளவு அதிகரிக்கும் வீதம்	1.5 செ.மீ ² / வினாடி
15	ஒரு கோளத்தின் கன அளவு மற்றும் ஆரத்தில் ஏற்படும் மாறுவீதங்கள் எண்ணளவில் சமமாக இருக்கும்போது கோளத்தின் வளைபரப்பு	1
16	$x^3 - 2x^2 + 3x + 8$ அதிகரிக்கும் வீதமானது x அதிகரிக்கும் வீதத்தைப் போல் இரு மடங்கு எனில் x இன் மதிப்புகள்	$(\frac{1}{3}, 1)$
17	ஒரு உருளையின் ஆரம் 2 செ.மீ. / வினாடி என்ற வீதத்தில் அதிகரிக்கின்றது, அதன் உயரம் 3 செ.மீ. / வினாடி என்ற வீதத்தில் குறைகின்றது, ஆரம் 3 செ.மீ. மற்றும் உயரம் 5 செ.மீ. ஆக இருக்கும் போது அதன் கன அளவின் மாறு வீதம்	33π
18	$y = 6x - x^3$ மேலும் x ஆனது வினாடிக்கு 5 அவகுகள் வீதத்தில் அதிகரிக்கின்றது, $x = 3$ எனும் போது அதன் சாய்வின் மாறுவீதம்	-90 அவகுகள் / வினாடி
19	ஒரு கனச்சதுரத்தின் கன அளவு 4 செ.மீ. ³ / வினாடி என்ற வீதத்தில் அதிகரிக்கின்றது, அக்கனச்சதுரத்தின் கன அளவு 8 க.செ.மீ. ஆக இருக்கும் போது அதன் புறப்பரப்பளவு அதிகரிக்கும் வீதம்	8 செ.மீ. ² / வினாடி
20	$y = 8 + 4x - 2x^2$ என்ற வளைவரை y -அச்சை வெட்டும் புள்ளியில் அமையும் தொடுகோட்டின் சாய்வு	4
21	$y^2 = x$ மற்றும் $x^2 = y$ என்ற பரவளையங்களுக்கிடையே ஆதியில் அமையும் கோணம்	$\frac{\pi}{2}$

வினா எண்	வினா	விடை
22	$x = e^t \cos t$; $y = e^t \sin t$ என்ற வளைவரையின் தொடுகோடு x -அச்சுக்கு இணையாகவுள்ளது எனில் t இன் மதிப்பு	$-\frac{\pi}{4}$
23	ஒரு வளைவரையின் செங்கோடு x -அச்சின் மிகை திசையில் θ என்னும் கோணத்தை ஏற்படுத்துகிறது, அச்செங்கோடு வரையப்பட்ட புள்ளியில் வளைவரையின் சாய்வு	$-\cot \theta$
24	$y = 3e^x$ மற்றும் $y = \frac{a}{3} e^{-x}$ என்னும் வளைவரைகள் செங்குத்தாக வெட்டிக் கொள்கின்றன எனில் 'a' இன் மதிப்பு	1
25	$s = t^3 - 4t^2 + 7$ எனில் முடுக்கம் பூச்சியமாகும் போதுள்ள திசைவேகம்	$-\frac{16}{3}$ m/sec
26	ஒரு நேர்க்கோட்டில் நகரும் புள்ளியின் திசைவேகமானது. அக்கோட்டில் ஒரு நீலைப்புள்ளியிலிருந்து நகரும் புள்ளிக்கு இடையில் உள்ள தொலைவின் வர்க்கத்திற்கு நேர் விகிதமாக அமைந்துள்ளது எனில் அதன் முடுக்கம் பின்வரும் ஒன்றினுக்கு விகிதமாக அமைந்துள்ளது	s^3
27	$y = x^2$ என்ற சார்பிற்கு $[-2, 2]$ இல் ரோலின் மாரிஸி	0
28	$a = 0, b = 1$ எனக் கொண்டு $f(x) = x^2 + 2x - 1$ என்ற சார்பிற்கு வெக்டரஞ்சியின் இடைமதிப்புத் தேற்றத்தின் படியுள்ள 'c' இன் மதிப்பு	$\frac{1}{2}$
29	$f(x) = \cos \frac{x}{2}$ என்ற சார்பிற்கு $[\pi, 3\pi]$ இல் ரோல் தேற்றத்தின் படி அமைந்த c இன் மதிப்பு	2π
30	$a = 1$ மற்றும் $b = 4$ எனக் கொண்டு $f(x) = \sqrt{x}$ என்ற சார்பிற்கு வெக்டரஞ்சியின் இடைமதிப்புத் தேற்றத்தின் படி அமையும் 'c' இன் மதிப்பு	$\frac{9}{4}$
31	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^2}$ ன் மதிப்பு	0
32	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{c^x - d^x}$ ன் மதிப்பு	$\frac{\log(\frac{a}{b})}{\log(\frac{c}{d})}$
33	$f(a) = 2; f'(a) = 1; g(a) = -1; g'(a) = 2$ எனில் $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(x)f(a) - g(a)f(x)}{x - a}$ ன் மதிப்பு	5
34	பின்வருவனவற்றுள் எது $(0, \infty)$ இல் ஏறும் சார்பு?	e^x
35	$f(x) = x^2 - 5x + 4$ என்ற சார்பு ஏறும் இடைவெளி	$(4, \infty)$
36	$f(x) = x^2$ என்ற சார்பு இறங்கும் இடைவெளி	$(-\infty, 0)$
37	$y = \tan x - x$ என்ற சார்பு	$(0, \frac{\pi}{2})$ இல் ஏறும் சார்பு
38	கொடுக்கப்பட்டுள்ள அரை வட்டத்தின் விட்டம் 4 செ.மீ. அதனுள் வரையப்படும் செவ்வகத்தின் பெரும பரப்பு	4
39	100 மீ^2 பரப்பு கொண்டள்ள செவ்வகத்தின் மீச்சிறு சுற்றளவு	40
40	$f(x) = x^2 - 4x + 5$ என்ற சார்பு $[0, 3]$ இல் கொண்டுள்ள மீப்பெரு பெரும மதிப்பு	5
41	$y = -e^{-x}$ என்ற வளைவரை	எப்போதும் கீழ்நோக்கிக் குழிவு
42	பின்வரும் வளைவரைகளுள் எது கீழ்நோக்கி குழிவு பெற்றுள்ளது?	$y = -x^2$
43	$y = x^4$ என்ற வளைவரையின் வளைவு மாற்றுப்புள்ளி	எங்குமில்லை
44	$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ என்ற வளைவரைக்கு $x = 1$ இல் ஒரு வளைவு மாற்றுப்புள்ளி உண்டெனில்	$3a + b = 0$

வகை நுண்கணிதம் - பயன்பாடுகள் II

பிரிவு - அ வினா விடைகள்

வினா எண்	வினா	விடை
1	$u = x^y$ எனில் $\frac{\partial u}{\partial x}$ க்குச் சமமானது	yx^{y-1}
2	$u = \sin^{-1}\left(\frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}\right)$ மற்றும் $f = \sin u$ எனில். சமபடித்தான சார்பு f இன்படி	2
3	$u = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ எனில் $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} =$	$-u$
4	$y^2(x-2) = x^2(1+x)$ என்ற வளைவரைக்கு	y -அச்சுக்கு இணையான ஒரு தொலைத் தொடுகோடு உண்டு
5	$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ எனில் $\frac{\partial r}{\partial x} =$	$\cos \theta$
6	பின்வருவனவற்றுள் சரியான கூற்றுகள்: (i) ஒரு வளைவரை ஆதியைப் பொறுத்து சமச்சீர் பெற்றிருப்பின் அது இரு அச்சுகளைப் பொறுத்தும் சமச்சீர் பெற்றிருக்கும். (ii) ஒரு வளைவரை இரு அச்சுகளைப் பொறுத்து சமச்சீர் பெற்றிருப்பின் அது ஆதியைப் பொறுத்தும் சமச்சீர் பெற்றிருக்கும். (iii) $f(x,y) = 0$ என்ற வளைவரை $y = x$ என்ற கோட்டைப் பொறுத்து சமச்சீர் பெற்றுள்ளது எனில் $f(x,y) = f(y,x)$. (iv) $f(x,y) = 0$ என்ற வளைவரைக்கு $f(x,y) = f(-y,-x)$, உண்மையாயின் அது ஆதியைப் பொறுத்து சமச்சீர் பெற்றிருக்கும்.	(ii), (iii)
7	$u = \log\left(\frac{x^2+y^2}{xy}\right)$ எனில் $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} =$	0
8	28இன் 11ஆம் படிமூல சதவிகிதப் பிழை தோராயமாக 28இன் சதவிகிதப் பிழையைப் போல் ___ மடங்காகும்.	$\frac{1}{11}$
9	$a^2y^2 = x^2(a^2 - x^2)$ என்ற வளைவரை	$x = -a$ மற்றும் $x = a$ க்கு இடையில் இரு கண்ணிகள் கொண்டு உள்ளது
10	$y^2(a+2x) = x^2(3a-x)$ என்ற வளைவரையின் தொலைத் தொடுகோடு	$x = -\frac{a}{2}$
11	$y^2(a+x) = x^2(3a-x)$ என்ற வளைவரை பின்வருவனவற்றுள் எந்தப் பகுதியில் அமையாது?	$x \leq -a$ மற்றும் $x > 3a$
12	$u = y \sin x$ எனில் $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} =$	$\cos x$
13	$u = f\left(\frac{x}{y}\right)$ எனில் $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y}$ ன் மதிப்பு	0
14	$9y^2 = x^2(4-x^2)$ என்ற வளைவரை எதற்கு சமச்சீர்?	இரு அச்சுகள்
15	$ay^2 = x^2(3a-x)$ என்ற வளைவரை y -அச்சை வெட்டும் புள்ளிகள்	$x = 0$

பிரிவு ஆ வினா விடைகள்

1. வகையீடுகளைப் பயன்படுத்தி $\sqrt{36.1}$ ன் தோராய மதிப்புகளை கணக்கிடுக.

தீர்வு:

$$f(x) = x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}$$

எனவே $f(36) = 6$ மற்றும் $x = 36$ மற்றும் $dx = \Delta x = 0.1$
எனக்கொள்வோம்..

$$dy = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} dx$$

$$x = 36, dx = \Delta x = 0.1; f(36) = 6;$$

$$dy = \frac{1}{2} (36)^{-\frac{1}{2}}(0.1) = \frac{0.1}{12} = 0.008$$

$$\sqrt{36.1} = f(36 + 0.1) = f(36) + dy = 6 + \frac{0.1}{12} = 6.0083$$

செய்து பார்க்க:

வகையீடுகளைப் பயன்படுத்தி சின்வருவனவற்றின்

தோராயமதிப்புகளை கணக்கிடுக. (i) $\sqrt[3]{65}$ (ii) $\frac{1}{10.1}$

2. ஒரு கன சதுரத்தின் விளிம்பு 30 செ.மீ என கணக்கிடப் பட்டுள்ளது. அது கணக்கிடும்போது ஏற்பட்ட பிழை 0.1 செ.மீ. ஆகும். வகையீட்டைப் பயன்படுத்தி சின்வருவனவற்றைக் கணக்கிடும் போது ஏற்படும் அதிக பட்ச பிழையைக் கணக்கிடுக. (i) கன சதுரத்தின் கன அளவு (ii) கன சதுரத்தின் புறப்பரப்பு.

தீர்வு:

கன சதுரத்தின் கன அளவு $V = a^3$; $dV = 3a^2 da$

$$\Delta V = 3a^2 da \Rightarrow \Delta V \approx 3 \times 30 \times 30 \times 0.1 = 270 \text{ cm}^3$$

கன சதுரத்தின் புறப்பரப்பு $A = 6a^2$; $dA = 12a da$

$$\Delta A \approx 12 (30)(0.1) = 36 \text{ cm}^2$$

3. ஒரு தனி ஊசலின் நீளம் l மற்றும் முழு அலைவு நேரம் T எனில் $T = k\sqrt{l}$ (k - என்பது மாறிலி) தனி ஊசலின் நீளம் 32.1 செ.மீ. இருந்து 32.0 செ.மீ. க்கு மாறும் போது நேரத்தில் ஏற்படும் சதவீதப் பிழையைக் கணக்கிடுக.

தீர்வு :

$$T = k\sqrt{l}$$

$$\log T = \log k + \frac{1}{2} \log l$$

$$\frac{1}{T} dT = 0 + \frac{1}{2} \frac{1}{l} dl$$

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{dT}{T} = 0 + \frac{1}{2} \frac{1}{l} dl$$

$$\frac{\Delta T}{T} \times 100 = \frac{1}{2} \frac{dl}{l} \times 100$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{-0.1}{32.1} \right) \times 100 = -0.156 \%$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{-0.1}{32.1} \right) \times 100 = -0.156 \%$$

அலைவு நேரத்தில் ஏற்படும் சத வீதப் பிழை : 0.156% குறைவு ஆகும்.

செய்து பார்க்க:

ஒரு வட்ட வடிவத் தகட்டின் ஆரம் 24 செ.மீ, கணக்கீட்டில் ஏற்படும் அதிகபட்ச பிழை 0.02 செ.மீ எனக் கொண்டு (i) வகையீட்டைப் பயன்படுத்தி வட்டவடிவத் தகட்டின் பரப்பு கணக்கிடும் போது ஏற்படும் மிக அதிக பிழை காண்க. (ii) சரர் பிழையைக் காண்க.

4. $w = x + 2y + z^2$ என்ற சார்பில் $x = \cos t$; $y = \sin t$; $z = t$ எனில் $\frac{dw}{dt}$ காண்க.

தீர்வு:

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{dz}{dt}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 1; \quad \frac{dx}{dt} = -\sin t$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = 2; \quad \frac{dy}{dt} = \cos t$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = 2z; \quad \frac{dz}{dt} = 1$$

$$\frac{dw}{dt} = 1(1 - \sin t) + 2 \cos t + 2z$$

$$= -\sin t + 2 \cos t + 2t$$

6) $w = \log(x^2 + y^2)$

இங்கு $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ எனில் சங்கிலி விதியை பயன்படுத்தி $\frac{\partial w}{\partial r}$ மற்றும் $\frac{\partial w}{\partial \theta}$ கணக்கிடுக.

தீர்வு :

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r}$$

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{1}{x^2 + y^2} 2x \cos \theta + \frac{1}{x^2 + y^2} 2y \sin \theta$$

$$= \frac{2}{r^2} (r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta) = \frac{2}{r}$$

$$\frac{\partial w}{\partial \theta} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial w}{\partial \theta} = \frac{1}{x^2 + y^2} 2x(-r \sin \theta) + \frac{1}{x^2 + y^2} 2y (r \cos \theta)$$

$$= \frac{2r}{r^2} (-x \sin \theta + y \cos \theta)$$

$$= \frac{2r}{r^2} (-r \sin \theta \cos \theta + r \sin \theta \cos \theta) = 0$$

7. $V = ze^{ax+by}$ மற்றும் z ஆனது $x, y -$ இல் n ஆம் படி சமபடித்தான சார்பாயின் $x \frac{\partial V}{\partial x} + y \frac{\partial V}{\partial y} =$

$(ax + by + n)V$ என நிறுவுக.

தீர்வு :

$$V = ze^{ax+by}$$

$$x \frac{\partial V}{\partial x} = x \left[ze^{ax+by} \cdot a + e^{ax+by} \frac{\partial z}{\partial x} \right]$$

$$y \frac{\partial V}{\partial y} = y \left[ze^{ax+by} \cdot b + e^{ax+by} \frac{\partial z}{\partial y} \right]$$

$$x \frac{\partial V}{\partial x} + y \frac{\partial V}{\partial y} = e^{ax+by} \left[axz + byz + x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} \right]$$

$$= e^{ax+by} [axz + byz + nz]$$

$$= (ax + by + n)V$$

8. $u = (x-y)(y-z)(z-x)$ எனில்
 $u_x + u_y + u_z = 0$. எனக் காட்டுக.

தீர்வு :

$$u_x = (y-z)[(x-y)(-1) + (z-x).1]$$

$$= (y-z)[-(x-y) + (z-x)]$$

$$= (y-z)(z-x) - (y-z)(x-y)$$

$$u_y = (z-x)(x-y) - (z-x)(y-z)$$

$$u_z = (x-y)(y-z) - (x-y)(z-x)$$

$$\text{கூட்ட } u_x + u_y + u_z = 0.$$

பிரிவு -இ வினா விடைகள்

1. $u = \sin^{-1} \left[\frac{x-y}{\sqrt{x+y}} \right]$ எனில் யூலரின் தேற்றத்தைப்

பயன்படுத்தி $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2} \tan u$ எனக் காட்டுக.

தீர்வு:

$$u = \sin^{-1} \left[\frac{x-y}{\sqrt{x+y}} \right]$$

$$f = \sin u = \frac{x-y}{\sqrt{x+y}} \text{ என்க.}$$

f என்பது படி $\frac{1}{2}$ உடைய சமன்படித்தான் சார்பு.

எனவே, யூலரின் தேற்றப்படி,

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2} f \Rightarrow x \frac{\partial(\sin u)}{\partial x} + y \frac{\partial(\sin u)}{\partial y}$$

$$= \frac{1}{2} \sin u$$

$$x \cos u \frac{\partial u}{\partial x} + y \cos u \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2} \sin u$$

$\sin u$ ஆல் வகுக்க,

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2} \tan u$$

$$\Rightarrow x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2} \tan u$$

2. $u = \tan^{-1} \left[\frac{x^3+y^3}{x-y} \right]$ எனில் யூலரின் தேற்றத்தைப்

பயன்படுத்தி $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = \sin 2u$ எனக் காட்டுக.

தீர்வு:

$$u = \tan^{-1} \left[\frac{x^3+y^3}{x-y} \right]$$

$$f = \tan u = \frac{x^3+y^3}{x-y} \text{ என்க.}$$

f என்பது படி 2 உடைய சமன்படித்தான் சார்பு.

எனவே, யூலரின் தேற்றப்படி,

$$\sec^2 u \frac{\partial u}{\partial x} + y \sec^2 u \frac{\partial u}{\partial y} = 2 \tan u$$

$\sec^2 u$ ஆல் வகுக்க,

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 2 \frac{\tan u}{\sec^2 u}$$

$$= 2 \frac{\sin u}{\cos u} \times \cos^2 u = 2 \sin u \cos u = \sin 2u$$

3. $f = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ என்ற சார்பிற்கு யூலரின் தேற்றத்தைச் சரிபார்க்க.

தீர்வு: $f = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$

f என்பது படி -1 உடைய சமன்படித்தான் சார்பு.

எனவே, யூலரின் தேற்றப்படி $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = -f$.

சரிபார்த்தல்:

$$f = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = (x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{1}{2} (x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}-1} (2x) = -x(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$x \frac{\partial f}{\partial x} = -x^2(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}$$

இதே போன்று,

$$y \frac{\partial f}{\partial y} = -y^2(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}$$

கூட்ட,

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = -x^2(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$-y^2(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$= -(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}(x^2+y^2)$$

$$= -(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}} = -f$$

\therefore யூலரின் தேற்றம் சரிபார்க்கப்பட்டது.

4. $u = \tan^{-1} \left(\frac{x}{y} \right)$ என்ற சார்புக்கு $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ என்பதைச் சரிபார்க்க.

தீர்வு:

$$u = \tan^{-1} \left(\frac{x}{y} \right) \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y} \right)^2} \times \frac{1}{y} = \frac{y}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y} \right)^2} \times x \left(-\frac{1}{y^2} \right) = -\frac{x}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \left[\frac{(x^2 + y^2) \times 1 - (x)(2x)}{(x^2 + y^2)^2} \right] = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{(x^2 + y^2) \times 1 - (y)(2y)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$$

5. $u = \frac{x}{y^2} - \frac{y}{x^2}$ என்ற சார்புக்கு $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ என்பதைச் சரிபார்க்க.

தீர்வு:

$$u = \frac{x}{y^2} - \frac{y}{x^2} = xy^{-2} - yx^{-2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = (1)y^{-2} - y(-2x^{-3}) = y^{-2} + 2yx^{-3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x(-2y^{-3}) - (1)x^{-2} = -2xy^{-3} - x^{-2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = -2(1)y^{-3} - (-2x^{-3})$$

$$= -2y^{-3} + 2x^{-3} \dots \dots \dots (1)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = -2y^{-3} + 2(1)x^{-3}$$

$$= -2y^{-3} + 2x^{-3} \dots \dots \dots (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$$

6. $u = \sin 3x \cos 4y$ என்ற சார்புக்கு $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ என்பதைச் சரிபார்க்க.

தீர்வு:

$$u = \sin 3x \cos 4y$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \cos 3x (2) \cos 4y = 3 \cos 3x \cos 4y$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \sin 3x (-\sin 4y)4 = -4 \sin 3x \sin 4y$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = -4 \sin 4y (\cos 3x)(3)$$

$$= -12 \cos 3x \sin 4y \dots \dots \dots (1)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = 3 \cos 3x (-\sin 4y)4$$

$$= -12 \cos 3x \sin 4y \dots \dots \dots (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$$

7. வகையீடுகளைப் பயன்படுத்தி $y = \sqrt[3]{1.02} + \sqrt[4]{1.02}$ ன் தேராய மதிப்புகளை கணக்கிடுக.

தீர்வு: $y = f(x) = \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x} = x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{1}{4}}$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = f'(x) = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} + \frac{1}{4} x^{-\frac{3}{4}}$$

எனவே $f(1) = 2$ மற்றும் $x = 1$ மற்றும் $dx = \Delta x = 0.02$

எனக்கொள்வோம்..

$$dy = \left(\frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} + \frac{1}{4} x^{-\frac{3}{4}} \right) dx$$

$$x = 1, dx = \Delta x = 0.02 ; f(1) = 2;$$

$$dy = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) (0.02) = \left(\frac{4+3}{12} \right) (0.02) = \frac{0.07}{6} = 0.01167$$

$$\therefore \sqrt[3]{1.02} + \sqrt[4]{1.02} = f(1 + 0.01) = f(1) + dy = 2 + 0.01167 = 2.01167$$

8. $w = u^2 e^v$ என்ற சார்பில் $u = \frac{x}{y}$ மற்றும் $v = y \log x$

எனுமாறு இருப்பின் $\frac{\partial w}{\partial x}$ மற்றும் $\frac{\partial w}{\partial y}$ காண்க.

$$w = u^2 e^v \Rightarrow \frac{\partial w}{\partial u} = 2ue^v; \frac{\partial w}{\partial v} = u^2 e^v$$

$$u = \frac{x}{y} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{y}, \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-x}{y^2}$$

$$v = y \log x \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{y}{x}; \frac{\partial v}{\partial y} = \log x$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$= 2ue^v \left(\frac{1}{y} \right) + u^2 e^v \left(\frac{y}{x} \right)$$

$$= ue^v \left(\frac{2}{y} + \frac{uy}{x} \right)$$

$$= \frac{x}{y} e^{y \log x} \left(\frac{2}{y} + \frac{x}{y} \cdot \frac{y}{x} \right)$$

$$= \frac{x}{y} e^{\log x^y} \left(\frac{2}{y} + 1 \right)$$

$$= \frac{x}{y} x^y \left(\frac{2}{y} + 1 \right) = x^y \frac{x}{y^2} (2 + y)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$= \frac{x}{y} e^{y \log x} \left(-\frac{2x}{y^2} + \frac{x}{y} \log x \right)$$

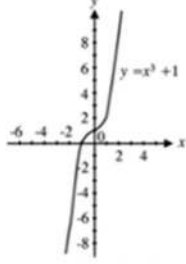
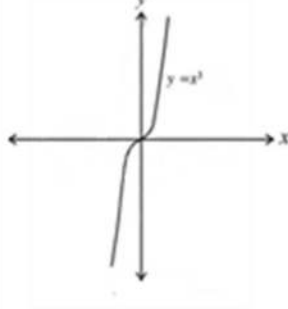
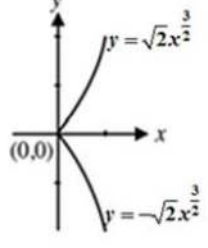
$$= \frac{x}{y} e^{\log x^y} \left(\frac{-2x + xy \log x}{y^2} \right)$$

$$= \frac{x}{y} x^y \left(\frac{-2x + xy \log x}{y^2} \right)$$

$$= \frac{x^2}{y^3} x^y (-2 + y \log x)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = x^y \frac{x}{y^2} (2 + y); \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{x^2}{y^3} x^y (y \log x - 2)$$

❖ வளைவரை வரைதல்

சமன்பாடு	$y = x^3 + 1$	$y = x^3$	$y^2 = 2x^3$
வரைப்படம்			
சார்பகம், நீட்டிப்பு, வெட்டுத்துண்டுகள் மற்றும் ஆதி:			
சார்பகம்	$(-\infty, \infty)$	$(-\infty, \infty)$	$[0, \infty)$
நீட்டிப்பு	கிடைமட்ட நீட்டிப்பு	$-\infty < x < \infty$	$0 \leq x < \infty$
	நிலைக் குத்து நீட்டிப்பு	$-\infty < y < \infty$	$-\infty < y < \infty$
வெட்டுத் துண்டுகள்	x - வெட்டு துண்டு	-1	0
	y - வெட்டு துண்டு	1	0
ஆதி	வளைவரை ஆதி வழிச் செல்லாது.	வளைவரை ஆதி வழிச் செல்லும்.	வளைவரை ஆதி வழிச் செல்லும்.
சமச்சீர் சோதனை	வளைவரையானது சமச்சீர் தன்மையை பெறவில்லை.	வளைவரை ஆதியைப் பொறுத்து சமச்சீரானது.	வளைவரை x பொறுத்து சமச்சீரானது
தொலைத்தொடு கோடுகள்	தொலைத் தொடு கோடுகள் இல்லை.	தொலைத் தொடு கோடுகள் இல்லை.	தொலைத் தொடு கோடுகள் இல்லை.
ஒரியல்பு தன்மை:	$y' \geq 0, \forall x \in (-\infty, \infty)$ என்பதால் $(-\infty, \infty)$ இல் முழுவதுமாக ஏறுமுகமாகச் செல்லும்.	$y' \geq 0, \forall x \in (-\infty, \infty)$ என்பதால் $(-\infty, \infty)$ இல் முழுவதுமாக ஏறுமுகமாகச் செல்லும்.	$y = \sqrt{2}x^{\frac{3}{2}}$ என்ற கிளையில் வளைவரை ஏறுமுகமாக இருக்கும். $y = -\sqrt{2}x^{\frac{3}{2}}$ என்ற கிளையில் வளைவரை இறங்கு முகமாக இருக்கும்.
சிறப்புப் புள்ளிகள்:	$(-\infty, 0)$ என்ற இடைவெளியில் கீழ் நோக்கி குழிவாகவும் மற்றும், $(0, \infty)$ என்ற இடைவெளியில் மேல் நோக்கி குழிவாகவும் இருக்கும். $(0, 1)$ என்பது வளைவு மாற்றுப் புள்ளி.	$(-\infty, 0)$ என்ற இடைவெளியில் கீழ் நோக்கி குழிவாகவும் மற்றும், $(0, \infty)$ என்ற இடைவெளியில் மேல் நோக்கி குழிவாகவும் இருக்கும். $(0, 0)$ என்பது வளைவு மாற்றுப் புள்ளி.	$(0, 0)$ என்பது வளைவு மாற்றுப் புள்ளியல்ல.

தொகை நுண்கணிதம் - பயன்பாடுகள்

பிரிவு -அ வினா விடைகள்

வினா எண்	வினா	விடை
1	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^5 x}{\cos^3 x + \sin^3 x} dx$ ன் மதிப்பு	$\frac{\pi}{4}$
2	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - \cos x}{1 + \sin x \cos x} dx$ ன் மதிப்பு	0
3	$\int_0^1 x(1-x)^4 dx$ ன் மதிப்பு	$\frac{1}{30}$
4	$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin x}{2 + \cos x} \right) dx$ ன் மதிப்பு	0
5	$\int_0^{\pi} \sin^4 x dx$ ன் மதிப்பு	$\frac{3\pi}{8}$
6	$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^3 2x dx$ ன் மதிப்பு	$\frac{1}{3}$
7	$\int_0^{\pi} \sin^2 x \cos^3 x dx$ ன் மதிப்பு	0
8	$y = x$ என்ற கோட்டிற்கும் x -அச்சு, கோடுகள் $x = 1$ மற்றும் $x = 2$ ஆகியவற்றிற்கும் இடைப்பட்ட அரங்கத்தின் பரப்பு	$\frac{3}{2}$
9	$x = 0$ இலிருந்து $x = \frac{\pi}{4}$ வரையிலான $y = \sin x$ மற்றும் $y = \cos x$ என்ற வளைவரைகளின் இடைப்பட்ட பரப்பு	$\sqrt{2} - 1$
10	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ என்ற நீள் வட்டத்திற்கும் அதன் துணை வட்டத்திற்கும் இடைப்பட்ட பரப்பு	$\pi a(a - b)$
11	பரவளை $y^2 = x$ க்கும் அதன் செவ்வகவகத்திற்கும் இடைப்பட்ட பரப்பு	$\frac{1}{6}$
12	$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$ என்ற வளைவரையை குற்றச்சை பொறுத்து சுழற்றப் படும் திடப்பொருளின் கன அளவு	64π
13	$y = \sqrt{3 + x^2}$ என்ற வளைவரை $x = 0$ விலிருந்து $x = 4$ வரை x -அச்சை அச்சாக வைத்துச் சுழற்றப் படும் திடப்பொருளின் கன அளவு	$\frac{100}{3}\pi$
14	கோடுகள் $y = x, y = 1$ மற்றும் $x = 0$ ஆகியவை ஏற்படுத்தும் பரப்பு y -அச்சை பொறுத்துச் சுழற்றப்படும் திடப்பொருளின் கன அளவு	$\frac{\pi}{3}$
15	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ என்ற நீள்வட்டத்தின் பரப்பை நெட்டச்சு, குற்றச்சு இவற்றை பொறுத்துச் சுழற்றப்படும் திடப்பொருளின் கன அளவுகளின் விகிதம்	$b : a$
16	$(0, 0), (3, 0)$ மற்றும் $(3, 3)$ ஆகியவற்றை முனைப் புள்ளிகளாகக் கொண்ட முக்கோணத்தின் பரப்பு x -அச்சை பொறுத்துச் சுழற்றப் படும் திடப்பொருளின் கன அளவு	9π

வினா எண்	வினா	விடை
17	$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 4$ என்ற வளைவரையின் வில்லின் நீளம்	48
18	$y = 2x, x = 0$ மற்றும் $x = 2$ இவற்றிற்கு இடையே ஏற்படும் பரப்பு x -அச்சை 6பாறுத்துச் சுழற்றப்படும் திடப்பொருளின் வளைப்பரப்பு	$8\sqrt{5}\pi$
19	ஆரம் 5 உள்ள கோளத்தை தளங்கள் மையத்திலிருந்து 2 மற்றும் 4 தூரத்தில் வெட்டும் இரு இணையான தளங்களுக்கு இடைப்பட்ட பகுதியின் வளைப்பரப்பு	20π

பிரிவு - ஆ வினா விடைகள்

1. மதிப்பீடு $\int_0^1 \log\left(\frac{1}{x} - 1\right) dx$.

$$I = \int_0^1 \log\left(\frac{1}{x} - 1\right) dx = \int_0^1 \log\left(\frac{1-x}{x}\right) dx \dots\dots\dots (1)$$

$$\int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(a-x) dx \Rightarrow$$

$$I = \int_0^1 \log\left(\frac{x}{1-x}\right) dx \dots\dots\dots (2)$$

$$(1) + (2) \Rightarrow 2I = \int_0^1 \log\left(\frac{1-x}{x}\right) dx + \int_0^1 \log\left(\frac{x}{1-x}\right) dx$$

$$= \int_0^1 \left[\log\left(\frac{1-x}{x}\right) + \log\left(\frac{x}{1-x}\right) \right] dx$$

$$= \int_0^1 \left[\log\left(\frac{1-x}{x}\right) \times \left(\frac{x}{1-x}\right) \right] dx$$

$$= \int_0^1 \log 1 dx = 0 \Rightarrow I = \frac{0}{2} = 0$$

2. மதிப்பீடு $\int_0^3 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{3-x}} dx$. M-2006,2007,J-2009

$$I = \int_0^3 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{3-x}} dx \dots\dots\dots (1)$$

$$\int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(a-x) dx \Rightarrow$$

$$I = \int_0^3 \frac{\sqrt{3-x}}{\sqrt{3-x} + \sqrt{x}} dx \dots\dots\dots (2)$$

$$(1) + (2) \Rightarrow 2I = \int_0^3 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{3-x}} dx + \int_0^3 \frac{\sqrt{3-x}}{\sqrt{3-x} + \sqrt{x}} dx$$

$$= \int_0^3 \frac{\sqrt{x} + \sqrt{3-x}}{\sqrt{x} + \sqrt{3-x}} dx$$

$$= \int_0^3 dx = [x]_0^3 = 3 \Rightarrow I = \frac{3}{2}$$

3. மதிப்பீடு $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{1 + \sqrt{\tan x}}$

$$I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{1 + \sqrt{\tan x}} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{1 + \sqrt{\frac{\sin x}{\cos x}}}$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x}} dx \dots\dots\dots (1)$$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_0^a f(a+b-x) dx \Rightarrow$$

$$I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} dx \dots\dots\dots (2)$$

$$(1) + (2) \Rightarrow 2I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} dx$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} dx = [x]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$$

$$\therefore I = \frac{\pi}{12}$$

செய்து பார்க்க:

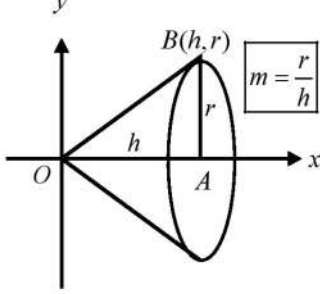
1. மதிப்பீடு $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{1 + \sqrt{\cot x}}$

2. மதிப்பீடு $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(\sin x)}{f(\sin x) + f(\cos x)} dx$.

3. மதிப்பீடு $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \tan x dx$.

பிரிவு - இ வினா விடைகள்

❶. ஆரம் 'r', குத்துரயம் 'h' உடைய கூம்பின் கனஅளவைக் காண்க.

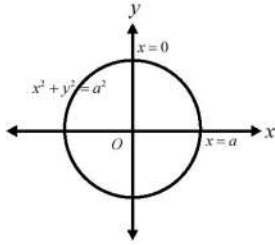


$(0,0), (h, r)$ என்ற புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோட்டின் சமன்பாடு

$$y = mx = \frac{r}{h}x$$

$$\begin{aligned} \text{கூம்பின் கனஅளவு} &= \int_0^h \pi y^2 dx = \pi \int_0^h \frac{r^2}{h^2} x^2 dx \\ &= \frac{\pi r^2}{h^2} \left(\frac{x^3}{3} \right)_0^h \\ &= \frac{\pi r^2}{h^2} \left(\frac{h^3}{3} \right) = \frac{\pi r^2 h}{3} \text{ க.அலகுகள்} \end{aligned}$$

2. சுற்று அ அ நுணுருள வூருதந்ர கீவஸனூலுன டுயூடு.



வட்டத்தின் சமன்பாடு $x^2 + y^2 = a^2$
வட்டம் இரு அச்சுகளைப் பொருத்து சமச்சீராக இருக்கும்.
∴ வட்டத்தின் சுற்றளவு = $4 \times$ முதல் கால்பகுதியின் நீளம்

$$s = 4 \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} dx$$

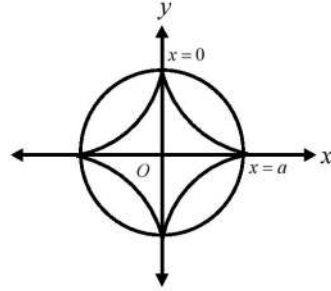
$$x^2 + y^2 = a^2 \Rightarrow 2x + 2y \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

$$1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = 1 + \frac{x^2}{y^2} = \frac{y^2 + x^2}{y^2} = \frac{a^2}{a^2 - x^2}$$

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$\begin{aligned} &= 4 \int_0^a \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx \\ &= 4a \left(\sin^{-1} \left(\frac{x}{a} \right) \right)_0^a \\ &= 4a [\sin^{-1} 1 - \sin^{-1} 0] \\ &= \frac{4a\pi}{2} = 2\pi a \text{ அலகுகள்} \end{aligned}$$

❸. $\left(\frac{x}{a} \right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{a} \right)^{\frac{2}{3}} = 1$ என்ற வளைவரையின் நீளத்தைக் காண்க.



$$\begin{aligned} \frac{x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}} = 1 &\Rightarrow \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} + \frac{2}{3} y^{-\frac{1}{3}} \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} \\ &= -\frac{x^{-\frac{1}{3}}}{y^{-\frac{1}{3}}} = -\frac{y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}} \\ 1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 &= 1 + \frac{y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}} = \frac{x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}} = \frac{a^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}} \\ \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} &= \frac{a^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}} = a^{\frac{1}{3}} x^{-\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

வளைவரையானது அச்சுகளைப் பொறுத்து சமச்சீராக இருப்பதால் வளைவரையின் மொத்த நீளம் முதல் கால் வட்டப் பகுதியில் அமைந்து உள்ள நீளத்தைப் போல் நான்கு மடங்காகும்.

$$\begin{aligned} \therefore \text{வளைவரையின் மொத்த நீளம்} &= 4 \int_0^a \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} dx \\ &= 4 \int_0^a a^{\frac{1}{3}} x^{-\frac{1}{3}} dx \\ &= 4a^{\frac{1}{3}} \left[\frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} \right]_0^a \\ &= 4a^{\frac{1}{3}} \left(\frac{3}{2} \right) a^{\frac{2}{3}} = 6a \end{aligned}$$

மாற்று முறை

நாற்கூர் சமவளை (Astroid) இன் துணையலகு அமைப்பு
 $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t$

$$\frac{dx}{dt} = a(3 \cos^2 t)(-\sin t) = -3a \cos^2 t \sin t$$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= a(3 \sin^2 t)(\cos t) = 3 \sin^2 t \cos t \\ \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 &= 9a^2 \cos^4 t \sin^2 t + 9a^2 \sin^4 t \cos^2 t \\ &= 9a^2 \cos^2 t \sin^2 t (\cos^2 t + \sin^2 t) \\ &= 9a^2 \cos^2 t \sin^2 t\end{aligned}$$

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = 3a \sin t \cos t$$

வளைவரையானது அச்சுகளைப் பொறுத்து சமச்சீராக இருப்பதால் வளைவரையின் மொத்த நீளம் முதல் கால் வட்டப் பகுதியில் அமைந்து உள்ள நீளத்தைப் போல் நான்கு மடங்காகும்.

$$\begin{aligned}\therefore \text{வளைவரையின் மொத்த நீளம்} &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3a \sin t \cos t dt \\ &= 6a \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin t \cos t dt \\ &= 6a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t dt \\ &= 6a \left[-\frac{\cos 2t}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= -3a(\cos \pi - \cos 0) \\ &= -3a(-1 - 1) \\ &= 6a \text{ அலகுகள்}\end{aligned}$$

4. $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$ என்ற வளைவரையின் நீளத்தினை $t = 0$ முதல் $t = \pi$ வரை கணக்கிடுக.

$$\begin{aligned}x &= a(t - \sin t) \Rightarrow \frac{dx}{dt} = a(1 - \cos t) \\ y &= a(1 - \cos t) \Rightarrow \frac{dy}{dt} = a(0 + \sin t) \\ \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 &= a^2(1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t \\ &= a^2(1 - 2 \cos t + \cos^2 t + \sin^2 t) \\ &= a^2(2 - 2 \cos t) = 2a^2(1 - \cos t) \\ &= 2a^2 \left(2 \sin^2 \frac{t}{2}\right) = 4a^2 \sin^2 \frac{t}{2} \\ \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} &= 2a \sin \frac{t}{2} \\ s &= \int_0^{\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt\end{aligned}$$

$$= \int_0^{\pi} 2a \sin \frac{t}{2} dt = 2a \left[-\frac{\cos \frac{t}{2}}{\frac{1}{2}} \right]_0^{\pi} = -4a(0 - 1) = 4a$$

செய்து பார்க்க:

4. $4y^2 = x^3$ என்ற வளைவரையில் $x = 0$ இலிருந்து $x = 1$ வரையுள்ள வில்லின் நீளத்தைக் காண்க. **M-2008**

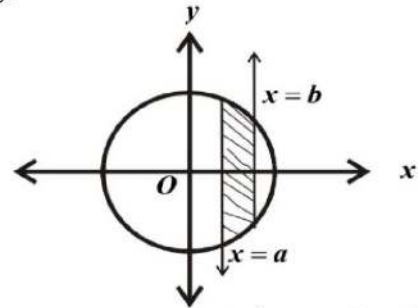
5. $y^2 = 4ax$ என்ற பரவளையத்தின் அதன் செவ்வகம் வரையிலான பரப்பினை x -அச்சின் மீது சுழற்றும்போது கிடைக்கும் திடப்பொருளின் வளைபரப்பைக் காண்க.

$$\begin{aligned}y^2 &= 4ax \Rightarrow 2y \frac{dy}{dx} = 4a \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{4a}{2y} = \frac{2a}{y} \\ 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 &= 1 + \frac{4a^2}{y^2} = \frac{y^2 + 4a^2}{y^2} = \frac{4ax + 4a^2}{y^2} \\ &= \frac{4a(x + a)}{y^2}\end{aligned}$$

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \frac{2\sqrt{a}\sqrt{x+a}}{y}$$

$$\begin{aligned}\text{வளைபரப்பு} &= \int_0^a 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \\ &= \int_0^a 2\pi y \left(\frac{2\sqrt{a}\sqrt{x+a}}{y}\right) dx \\ &= 4\pi\sqrt{a} \int_0^a \sqrt{x+a} dx \\ &= 4\pi\sqrt{a} \left[\frac{(x+a)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^a \\ &= \frac{8\pi\sqrt{a}}{3} \left[(2a)^{\frac{3}{2}} - (a)^{\frac{3}{2}} \right] \\ &= \frac{8\pi\sqrt{a}}{3} (a\sqrt{a}) [2\sqrt{2} - 1] \\ &= \frac{8\pi a^2}{2} (2\sqrt{2} - 1)\end{aligned}$$

6. ஆரம் r அலகுகள் உள்ள கோளத்தின் மையத்திலிருந்து a மற்றும் b அலகுகள் தொலைவில் அமைந்த இரு இணையான தளங்கள் கோளத்தை வெட்டும்போது இடைப்படும் பகுதியின் வளைபரப்பு $2\pi r(b - a)$ என நிறுவுக. இதிலிருந்து கோளத்தின் வளைபரப்பை வருவி. ($b > a$).



$$x^2 + y^2 = r^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \Rightarrow 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + \frac{x^2}{y^2} = \frac{y^2 + x^2}{y^2} = \frac{r^2}{y^2}$$

$$S = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

$$= 2\pi \int_a^b r dx = 2\pi r(b - a)$$

$$a = -r, b = r \Rightarrow S. A. = 2\pi r(r + r) = 4\pi r^2$$

$$\text{கோளத்தின் வளைபரப்பு} = 4\pi r^2$$

செய்து பார்க்க:

- ✓ $x = a(t + \sin t), y = a(1 + \cos t)$ என்ற வட்ட உருள் வளை (cycloid) அதன் அடிப்பக்கத்தைப் (x -அச்சு) பொறுத்து சுழற்றுவதால் ஏற்படும் திடப் பொருளின் வளைப்பரப்பைக் காண்க.
- ✓ $y = \sin x$ என்ற வளைவரை $x = 0, x = \pi$ மற்றும் x -அச்சு ஆகியவற்றால் ஏற்படும் பரப்பினை x -அச்சினைப் பொறுத்து சுழற்றும் போது கிடைக்கும் திடப்பொருளின் வளைபரப்பு $2\pi [\sqrt{2} + \log(1 + \sqrt{2})]$ என நிறுவுக.

வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள்

பிரிவு - அ வினா விடைகள்

வினா எண்	வினா	விடை
1	$\frac{dy}{dx} + 2\frac{y}{x} = e^{4x}$ என்ற வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் தொகைக் காரணி	x^2
2	$\frac{dy}{dx} + Py = Q$ என்ற வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் தொகைக் காரணி $\cos x$ எனில், P இன் மதிப்பு	$-\tan x$
3	$dx + xdy = e^{-y} \sec^2 y dy$ இன் தொகைக் காரணி	e^y
4	$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x \log x} y = \frac{2}{x^2}$ இன் தொகைக் காரணி	$\log x$
5	$m < 0$ ஆக இருப்பின் $\frac{dx}{dy} + mx = 0$ இன் தீர்வு	$x = ce^{-my}$
6	$y = cx - c^2$ என்பதனைப் பொறுத் தீர்வாகப் பெற்ற வகைக்கெழு சமன்பாடு	$(y')^2 - xy' + y = 0$
7	$\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 5y^{\frac{1}{3}} = x$ என்ற வகைக்கெழுவினின்	வரிசை 1 மற்றும் படி 2
8	ஒரு தளத்தில் உள்ள x -அச்சுக்கு செங்குத்தல்லாத கோடுகளின் வகைக்கெழுச் சமன்பாடு	$\frac{d^2y}{dx^2} = 0$
9	ஆதிப்புள்ளியை மையமாகக் கொண்ட வட்டங்களின் தொகுப்பின் வகைக்கெழுச் சமன்பாடு	$x dx + y dy = 0$
10	வகைக்கெழுச் சமன்பாடு $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ வின் தொகைக் காரணி	$e^{\int P dx}$
11	$(D^2 + 1)y = e^{2x}$ இன் தீர்ப்புச் சார்பு	$A \cos x + B \sin x$
12	$(D^2 - 4D + 4)y = e^{2x}$ இன் சிறப்புத் தீர்வு (PI)	$\frac{x^2}{2} e^{2x}$
13	$y = mx$ என்ற நேர்க்கோடுகளின் தொகுப்பின் வகைக்கெழுச் சமன்பாடு	$y dx - x dy = 0$
14	$\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^{\frac{1}{3}}} = \frac{d^2y}{dx^2}$ என்ற வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் படி	6
15	$c = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^3\right]^{\frac{2}{3}}}{\frac{d^3y}{dx^3}}$ என்ற வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் படி	3
16	ஒரு கதிர்வகை பொருளின் மாறுவீத மதிப்பு. அம்மதிப்பின் (p) நேர் விகிதத்தில் சிதைவுறுகிறது. இதற்கு ஏற்ற வகைக் கெழுச் சமன்பாடு (k குறை எண்)	$\frac{dp}{dt} = kp$
17	xy தளத்திலுள்ள எல்லா நேர்க்கோடுகளின் தொகுப்பின் வகைக்கெழுச் சமன்பாடு	$\frac{d^2y}{dx^2} = 0$
18	$y = ke^{\lambda x}$ எனில் அதன் வகைக்கெழுச் சமன்பாடு	$\frac{dy}{dx} = \lambda y$

பனிரெண்டாம் வகுப்பு - கணிதவியல் வினா விடை

வினா எண்	வினா	விடை
19	$y = a e^{3x} + b e^{-3x}$ என்ற சமன்பாட்டில் a யையும் b யையும் நீக்கிக்கிடைக்கும் வகைக்கெழுச் சமன்பாடு	$\frac{d^2y}{dx^2} - 9y = 0$
20	$y = e^x (A \cos x + B \sin x)$ என்ற தொடர்பில் A யையும் B யையும் நீக்கிப்பெறப்படும் வகைக்கெழுச் சமன்பாடு	$y_2 - 2y_1 + 2y = 0$
21	$\frac{dy}{dx} = \frac{x-y}{x+y}$ எனில்	$x^2 - y^2 - 2xy = c$
22	$f'(x) = \sqrt{x}$ மற்றும் $f(1) = 2$ எனில் $f(x)$ என்பது	$\frac{2}{3}(x\sqrt{x} + 2)$
23	$x^2 dy + y(x+y)dx = 0$ என்ற சமன்படித்தான வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டில் $y = vx$ எனப் பிரதியீடு செய்யும் போது கிடைப்பது	$x dv + (2v + v^2)dx = 0$
24	$\frac{dy}{dx} - y \tan x = \cos x$ என்ற வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் தொலைக்காரணி	$\cos x$
25	$(3D^2 + D - 14)y = 13e^{2x}$ இன் சிறப்புத் தீர்வு	xe^{2x}
26	$f(D) = (D - a)g(D), g(a) \neq 0$ எனில் வகைக்கெழுச் சமன்பாடு $f(D)y = e^{ax}$ இன் சிறப்புத் தீர்வு	$\frac{xe^{ax}}{g(a)}$

பிரிவு - இ வினா விடைகள்

❶ தீர்: $\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = 2e^{3x}$ இங்கு $x = \log 2$ எனில் $y = 0$ மற்றும் $x = 0$ எனில் $y = 0$.

தீர்வு: சிறப்புச் சமன்பாடு $p^2 - 3p + 2 = 0$.
 $(p - 2)(p - 1) = 0$
 $\Rightarrow p = 2$ மற்றும் $p = 1$

C. F. என்பது $Ae^{2x} + Be^x$.

$$P.I. = \frac{1}{D^2 - 3D + 2} 2e^{3x}$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{3^2 - 3 \cdot 3 + 2} e^{3x}$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{9 - 9 + 2} e^{3x}$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{2} e^{3x} = e^{3x}$$

எனவே பொதுத்தீர்வு

$$y = C.F. + P.I. = Ae^{2x} + Be^x + e^{3x}$$

$x = \log 2$ எனில் $y = 0$

$$0 = Ae^{2 \log 2} + Be^{\log 2} + e^{3 \log 2}$$

$$0 = Ae^{\log 2^2} + Be^{\log 2} + e^{\log 2^3}$$

$$0 = Ae^{\log 4} + Be^{\log 2} + e^{\log 8}$$

$$0 = 4A + 2B + 8$$

$$2A + B = -4 \dots \dots \dots (1)$$

$x = 0$ எனில் $y = 0$

$$0 = Ae^0 + Be^0 + e^0$$

$$0 = A + B + 1$$

$$A + B = -1 \dots \dots \dots (2)$$

$$(1) - (2) \Rightarrow 2A + B - A - B = -4 + 1 \Rightarrow \boxed{A = -3}$$

$$(2) \Rightarrow A + B = -1 \Rightarrow -3 + B = -1 \Rightarrow \boxed{B = 2}$$

எனவே சிறப்புத்தீர்வு

$$y = -3e^{2x} + 2e^x + e^{3x}$$

$$\boxed{y = e^x(2 - 3e^x + e^{2x})}$$

❷ தீர்: $(D^2 - 1)y = \cos 2x - 2 \sin 2x$.

தீர்வு: சிறப்புச் சமன்பாடு $p^2 - 1 = 0$.

$$(p - 1)(p + 1) = 0$$

$$\Rightarrow p = 1 \text{ மற்றும் } p = -1$$

C. F. என்பது $Ae^x + Be^{-x}$.

$$P.I_1 = \frac{1}{D^2 - 1} \cos 2x$$

$$= \frac{1}{-2^2 - 1} \cos 2x = \frac{1}{-4 - 1} \cos 2x$$

$$= -\frac{1}{5} \cos 2x$$

$$P.I_2 = \frac{1}{D^2 - 1} (-2 \sin 2x)$$

$$= -2 \cdot \frac{1}{-2^2 - 1} \sin 2x$$

$$= -2 \cdot \frac{1}{-4 - 1} \sin 2x = \frac{2}{5} \sin 2x$$

எனவே பொதுத்தீர்வு

$$y = C.F. + P.I_1 + P.I_2$$

$$\boxed{y = Ae^x + Be^{-x} - \frac{1}{5} \cos 2x + \frac{2}{5} \sin 2x}$$

❸ தீர்: $(D^2 - 2D + 2)y = \sin 2x + 5$.

தீர்வு: சிறப்புச் சமன்பாடு $p^2 - 2p + 2 = 0$.

$$p = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 8}}{2}$$

$$= \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{2 \pm 2i}{2} = 1 \pm i$$

C. F. என்பது $e^x(A \cos x + B \sin x)$.

$$P.I_1 = \frac{1}{D^2 - 2D + 2} \sin 2x$$

$$= \frac{1}{-2^2 - 2D + 2} \sin 2x$$

$$= \frac{1}{-4 - 2D + 2} \sin 2x = \frac{1}{-2D - 2} \sin 2x$$

$$= -\frac{1}{2(D+1)} \sin 2x = -\frac{1}{2} \cdot \frac{(D-1)}{(D+1)(D-1)} \sin 2x$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{(D-1)}{D^2-1} \sin 2x = -\frac{1}{2} \cdot \frac{(D-1)}{-2^2-1} \sin 2x$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{-4-1} [D(\sin 2x) - 1(\sin 2x)]$$

$$= \frac{1}{10} (2 \cos 2x - \sin 2x)$$

$$PI_2 = \frac{1}{D^2 - 2D + 2} 5 = \frac{1}{0 - 0 + 2} 5 = \frac{5}{2}$$

எனவே பொதுத்தீர்வு

$$y = C.F. + P.I_1 + P.I_2$$

$$y = e^x(A \cos x + B \sin x) + \frac{1}{10}(2 \cos 2x - \sin 2x) + \frac{5}{2}$$

Q4. தீர்: $(D^2 - 5D + 6)y = \sin 2x + 2e^{2x}$.

தீர்வு: சிறப்புச் சமன்பாடு $p^2 - 5p + 6 = 0$.

$$(p-3)(p-2) = 0$$

$$p = 3, p = 2$$

C.F. என்பது $Ae^{3x} + Be^{2x}$.

$$PI_1 = \frac{1}{D^2 - 5D + 6} \sin 2x = \frac{1}{-2^2 - 5D + 6} \sin 2x$$

$$= \frac{1}{-4 - 5D + 6} \sin 2x = \frac{1}{-5D + 2} \sin 2x$$

$$= -\frac{1}{(5D-2)} \sin 2x = -\frac{1}{(5D-2)(5D+2)} \sin 2x$$

$$= -\frac{(5D+2)}{25D^2-4} \sin 2x = -\frac{(5D+2)}{25(-2^2)-4} \sin 2x$$

$$= -\frac{1}{-100-4} [5D(\sin 2x) + 2(\sin 2x)]$$

$$= \frac{1}{104} (10 \cos 2x + 2 \sin 2x) = \frac{1}{52} (5 \cos 2x + \sin 2x)$$

$$PI_2 = \frac{1}{D^2 - 5D + 6} 2e^{2x} = \frac{1}{(D-3)(D-2)} 2e^{2x}$$

$$= \frac{1}{2-3} (x) 2e^{2x} = -2xe^{2x}$$

எனவே பொதுத்தீர்வு

$$y = C.F. + P.I_1 + P.I_2$$

$$y = Ae^{3x} + Be^{2x} + \frac{1}{52} (5 \cos 2x + \sin 2x) - 2xe^{2x}$$

Q5. தீர்: $(D^2 - 6D + 9)y = x + e^{2x}$

தீர்வு: சிறப்புச் சமன்பாடு $p^2 - 6p + 9 = 0$.

$$(p-3)^2 = 0$$

$$\Rightarrow p = 3 \text{ மற்றும் } p = 3$$

C.F. என்பது $(A + Bx)e^{3x}$.

$$PI_1 = \frac{1}{D^2 - 6D + 9} x = \ell x + m \text{ என்க.}$$

$$x = (D^2 - 6D + 9)(\ell x + m)$$

$$= D^2(\ell x + m) - 6D(\ell x + m) + 9(\ell x + m)$$

$$= \frac{d^2}{dx^2}(\ell x + m) - 6 \frac{d}{dx}(\ell x + m) + 9(\ell x + m)$$

$$= 0 - 6\ell + 9\ell x + 9m$$

(1)

$$x = 9\ell x + (9m - 6\ell)$$

இருபுறமும் x இன் கெழு மற்றும் மாறிலிகளைச் சமன்செய்ய

$$9\ell = 1 \Rightarrow \ell = \frac{1}{9}$$

$$9m - 6\ell = 0 \Rightarrow 9m = 6\ell = 6 \times \frac{1}{9} = \frac{2}{3} \Rightarrow m = \frac{2}{27}$$

(1) \Rightarrow

$$PI_1 = \frac{1}{9}x + \frac{2}{27}$$

$$PI_2 = \frac{1}{D^2 - 6D + 9} e^{2x}$$

$$= \frac{1}{2^2 - 6 \cdot 2 + 9} e^{2x}$$

$$= \frac{1}{4 - 12 + 9} e^{2x}$$

$$= \frac{1}{13 - 12} e^{2x} = e^{2x}$$

எனவே பொதுத்தீர்வு

$$y = C.F. + P.I_1 + P.I_2$$

$$y = (A + Bx)e^{3x} + \left(\frac{1}{9}x + \frac{2}{27}\right) + e^{2x}$$

Q6. ரேடியம் சிதையும் மாறுவீதமானது, அதில் காணப்படும் அளவிற்கு விகிதமாக அமைந்துள்ளது. 50 வருடங்களில் ஆரம்ப அளவிலிருந்து 5 சதவீதம் சிதைந்திருக்கிறது எனில் 100 வருட முடிவில் மீதியிருக்கும் அளவு என்ன? [A_0 ஐ ஆரம்ப அளவு எனக் கொள்க.]

தீர்வு: t எனும் வருடத்தில் மீதியிருக்கும் ரேடியத்தின்

அளவு A என்க. கணக்கின் படி,

$$\frac{dA}{dt} \propto A \Rightarrow \frac{dA}{dt} = kA \Rightarrow A = ce^{kt} \quad (1)$$

$t = 0$ எனில் $A = A_0$

$$(1) \Rightarrow A_0 = ce^{0 \cdot k}$$

$$\Rightarrow A_0 = ce^0$$

$$\Rightarrow A_0 = c \cdot 1$$

$$\Rightarrow c = A_0$$

$$\therefore A = A_0 e^{kt} \quad (2)$$

$t = 50$ எனில் $A = 0.95A_0$

$$(2) \Rightarrow 0.95A_0 = A_0 e^{50k}$$

$$e^{50k} = 0.95$$

$t = 100$ எனில் $A = ?$

$$A = A_0 e^{100k} = A_0 (e^{50k})^2$$

$$= A_0 (0.95)^2 = 0.9025A_0$$

100 வருட முடிவில் மீதியிருக்கும் அளவு $0.9025A_0$

Q7. ஒரு இரசாயன விளைவில், ஒரு பொருள் மாற்றம் அடையும் மாறுவீதமானது t நேரத்தில் மாற்றமடையாத அப்பொருளின் அளவிற்கு விகிதமாக உள்ளது. ஒரு மணி நேர முடிவில் 60 கிராமம்

பனிரெண்டாம் வகுப்பு – கணிதவியல் வினா விடை

மற்றும் 4 மணி நேர முடிவில் 21 கிராமம் மீதியிருந்தால் ஆரம்ப நிலையில் அப்பொருளின் எடையினைக் காண்க.

தீர்வு: t எனும் நேரத்தில் பொருளின் இருப்பு A என்க. கணக்கின் படி,

$$\frac{dA}{dt} \propto A \Rightarrow \frac{dA}{dt} = kA \Rightarrow \boxed{A = ce^{kt}} \dots (1)$$

$t = 1$ எனில் $A = 60$

$$(1) \Rightarrow 60 = ce^k \dots (2)$$

$t = 4$ எனில் $A = 21$

$$(1) \Rightarrow 21 = ce^{4k} \dots (3)$$

$$(2)^4 \Rightarrow 60^4 = c^4 e^{4k} \dots (4)$$

$$\frac{(4)}{(3)} \Rightarrow c^3 = \frac{60^4}{21} \Rightarrow \boxed{c = 85 \cdot 15}$$

\therefore ஆரம்ப நிலையில் பொருளின் எடை 85.15 கிராம் (தொராயமாக)

t	A
1	60
4	21
0	?

8. ஒரு வங்கியானது தொடர் கூட்டு வட்டி முறையில் வட்டியைக் கணக்கிடுகிறது. அதாவது வட்டி வீதத்தை அந்தந்த நேரத்தில் அசலின் மாறு வீதத்தில் கணக்கிடுகிறது. ஒருவரது வங்கி இருப்பில் தொடர்ச்சியான கூட்டு வட்டி மூலம் ஆண்டொன்றுக்கு 8% வட்டி பெருகிறது எனில் அவரது வங்கியிருப்பின் ஒரு வருட கால அதிகரிப்பின் சதவீதத்தை கணக்கிடுக.

[$e^{0.08} \approx 1.0833$ எடுத்துக் கொள்க]

தீர்வு: t எனும் நேரத்தில் அசல் $A(t)$ என்க. கணக்கின் படி,

$$\frac{dA}{dt} \propto A \Rightarrow \frac{dA}{dt} = 0.08A \Rightarrow \boxed{A(t) = ce^{0.08t}}$$

$t = 0$ எனில் $A(0) = c$

$t = 1$ எனில் $A(1) = ce^{0.08}$

\therefore ஒரு வருட அதிகரிப்பு

$$A(1) - A(0) = ce^{0.08} - c = c(e^{0.08} - 1) = c(1.0833 - 1) = 0.0833c$$

\therefore ஒரு வருட அதிகரிப்பு சதவீதம்

$$\frac{A(1) - A(0)}{A(0)} \times 100 = \frac{0.0833c}{c} \times 100 = 0.0833 \times 100 = 8.33\%$$

9. ரூ. 1000 என்ற தொகைக்கு தொடர்ச்சி கூட்டு வட்டி கணக்கிடப்படுகிறது. வட்டி வீதம் ஆண்டொன்றுக்கு 4 சதவீதமாக இருப்பின் அத்தொகை எத்தனை ஆண்டுகளில் ஆரம்பத் தொகையைப் போல் இரு மடங்காகும்? [$\log_e 2 = 0.6931$].

தீர்வு: t எனும் நேரத்தில் அசல் $A(t)$ என்க. கணக்கின் படி,

$$\frac{dA}{dt} \propto A \Rightarrow \frac{dA}{dt} = 0.04A$$

$$\Rightarrow \boxed{A(t) = ce^{0.04t}}$$

$t = 0$ எனில் $A(0) = 1000$

$$\Rightarrow 1000 = ce^0 \Rightarrow c = 1000$$

t	A
0	1000
?	2000

$$\Rightarrow \boxed{A(t) = 1000e^{0.04t}}$$

$A = 2000$ எனில் $t = ?$

$$0.04t = \log_e 2 \Rightarrow t = \frac{\log_e 2}{0.04} = \frac{0.6931}{0.04} = \frac{69.31}{4} = 17.32$$

17(தொராயமாக) ஆண்டுகளில் ஆரம்பத் தொகையைப் போல் இரு மடங்காகும்.

10. ஒரு நகரத்தில் உள்ள மக்கள் தொகையின் வளர்ச்சி வீதம் அந்நேரத்தில் உள்ள மக்கள் தொகைக்கு விகிதமாக அமைந்துள்ளது. 1960 ஆம் ஆண்டில் மக்கள் தொகை 1,30,000 எனவும் 1,60,000 ஆகவும் இருப்பின் 2020 ஆம் ஆண்டில் மக்கள் தொகை எவ்வளவாக இருக்கும்?

$$\left[\log_e \left(\frac{16}{13} \right) = 0.2070; e^{0.42} = 1.52 \right].$$

தீர்வு: t எனும் நேரத்தில் மக்கள் தொகை $A(t)$ என்க. கணக்கின் படி,

$$\frac{dA}{dt} \propto A \Rightarrow \frac{dA}{dt} = kA \Rightarrow \boxed{A(t) = ce^{kt}}$$

1960 ஆம் ஆண்டு மக்கள் தொகையினை தொடக்க மக்கள் தொகையாகக் கொள்க.

$t = 0$ எனில் $A(0) = 130000$

$$\Rightarrow 130000 = ce^0 \Rightarrow c = 130000$$

$$\Rightarrow \boxed{A(t) = 130000e^{kt}}$$

$t = 30$ எனில் $A(30) = 160000$

$$160000 = 130000e^{30k}$$

$$e^{30k} = \frac{160000}{130000} = \frac{16}{13}$$

$t = 60$ எனில் $A(60) = ?$

$$A(60) = 130000e^{60k}$$

$$= 130000(e^{30k})^2$$

$$= 130000 \left(\frac{16}{13} \right)^2$$

$$= 130000 \times \frac{16}{13} \times \frac{16}{13} = 10000 \times \frac{256}{13}$$

$$= 196923$$

2020 ஆம் ஆண்டில் மக்கள் தொகை தொராயமாக 97000 இருக்கும்.

11. ஒரு கதிரியக்கப் பொருள் சிதையும் மாறுவீதமானது அதன் எடைக்கு விகிதமாக அமைந்துள்ளது. அதன் எடை 10 மி.கிராம் ஆக இருக்கும் போது சிதையும் மாறுவீதம் நாளொன்றுக்கு 0.051 மி.கிராம் எனில் அதன் எடை 10 கிராமிலிருந்து 5 கிராமாகக் குறைய எடுத்துக் கொள்ளும் கால அளவைக் காண்க? [$\log_e 2 = 0.6931$].

தீர்வு: t எனும் நேரத்தில் கதிரியக்கப் பொருளின் எடை $A(t)$ என்க. கணக்கின் படி,

$$\frac{dA}{dt} \propto A \Rightarrow \frac{dA}{dt} = kA \Rightarrow \boxed{A(t) = ce^{kt}}$$

$t = 0$ எனில் $A(0) = 10$

t	A	$\frac{dA}{dt}$
0	10	-0.051
?	5	

$$\Rightarrow 10 = ce^0 \Rightarrow c = 10$$

$$\Rightarrow A(t) = 10e^{kt}$$

$$\frac{dA}{dt} = 10e^{kt} \times k = kA$$

A = 10 எனில்

$$\frac{dA}{dt} = -0.051$$

$$-0.051 = 10k \Rightarrow k = -0.0051$$

$$A(t) = 10e^{-0.0051t}$$

$$A = 5 \text{ எனில் } 5 = 10e^{-0.0051t} \Rightarrow \frac{1}{2} = e^{-0.0051t}$$

$$\Rightarrow 2 = e^{0.0051t}$$

$$\Rightarrow \log_e 2 = 0.0051t$$

$$\Rightarrow t = \frac{\log_e 2}{0.0051} = \frac{0.6931}{0.0051} = \frac{6931}{51} \approx 136$$

கதிரியக்கப் பொருளின் எடை 10 கிராமலிருந்து 5 கிராமமாகக் குறைய எடுத்துக் கொள்ளும் கால அளவு 136 நாட்கள்.(தோராயமாக)

❖12. நுண்ணுயிர்களின் பெருக்கத்தில், பாக்டீரியாவின் பெருக்கவீதமானது அதில் காணப்படும் பாக்டீரியாவின் எண்ணிக்கைக்கு விகிதமாக அமைந்துள்ளது. இப்பெருக்கத்தால் பாக்டீரியாவின் எண்ணிக்கை 1 மணி நேரத்தில் மூம்மடங்காகிறது எனில் ஐந்து மணி நேர முடிவில் பாக்டீரியாவின் எண்ணிக்கை ஆரம்ப நிலையைக் காட்டிலும் 3^5 மடங்காகும் எனக் காட்டுக.

தீர்வு: t எனும் நேரத்தில் பாக்டீரியாவின் எண்ணிக்கை A என்க.

கணக்கின் படி,

$$\frac{dA}{dt} \propto A \Rightarrow \frac{dA}{dt} = kA \Rightarrow A(t) = ce^{kt}$$

ஆரம்ப நிலையில் உள்ள பாக்டீரியாவின்

எண்ணிக்கை A_0 என்க.

$$t = 0 \text{ எனில் } A_0 = ce^0 \Rightarrow c = A_0$$

$$\Rightarrow A(t) = A_0e^{kt}$$

$$t = 1 \text{ எனில் } A(1) = 3A_0 \Rightarrow 3A_0 = A_0e^k \Rightarrow e^k = 3$$

$$t = 5 \text{ எனில் } A(5) = A_0e^{5k} = A_0(e^k)^5 = A_0(3)^5 = 3^5 \cdot A_0$$

∴ ஐந்து மணி நேர முடிவில் பாக்டீரியாவின் எண்ணிக்கை ஆரம்ப நிலையைக் காட்டிலும் 3^5 மடங்காகும்.

❖13. வெப்ப நிலை 15°C உள்ள ஒரு அறையில் வைக்கப்பட்டுள்ள தேநீரின் வெப்ப நிலை 100°C ஆகும். அது 5 நிமிடங்களில் 60°C ஆக குறைந்து விடுகிறது. மேலும் 5 நிமிடம் கழித்து தேநீரின் வெப்ப நிலையினை காண்க.

தீர்வு: t எனும் நேரத்தில் தேநீரின்

வெப்ப நிலை $T(t)$ என்க.

நியூட்டனின் குளிர்ச்சி விதிப்படி,

$$\frac{dT}{dt} \propto (T - S) \Rightarrow \frac{dT}{dt} = k(T - S)$$

$$\Rightarrow T - S = ce^{kt} \Rightarrow T = S + ce^{kt} = 15 + ce^{kt}$$

$$t = 0 \text{ எனில் } T = 100$$

$$\Rightarrow 100 = 15 + ce^0 \Rightarrow c = 100 - 15 = 85$$

t	A
0	A_0
1	$3A_0$
5	?

t	T
0	100
5	60
10	?

$$\Rightarrow T = 15 + 85e^{kt}$$

$$t = 5 \text{ எனில் } T = 60$$

$$\Rightarrow 60 = 15 + 85e^{5k} \Rightarrow 45 = 85e^{5k} \Rightarrow e^{5k} = \frac{45}{85} = \frac{9}{17}$$

$$t = 10 \text{ எனில் } T = ?$$

$$T = 15 + 85e^{10k} = 15 + 85(e^{5k})^2$$

$$= 15 + 85\left(\frac{9}{17}\right)^2 = 15 + 85 \times \frac{81}{17 \times 17}$$

$$= 15 + 5 \times \frac{81}{17} = 15 + \frac{405}{17}$$

$$= 15 + 23.82 = 38.82$$

மேலும் 5 நிமிடம் கழித்து தேநீரின் வெப்ப நிலை 38.82°C

❖14. ஒரு இறந்தவர் உடலை மருத்துவர் பரிசோதிக்கும் போது இறந்த நேரத்தை தோராயமாக கணக்கிட வேண்டியுள்ளது. இறந்தவர் உடலின் வெப்ப நிலை காலை 10.00 மணியளவில் 93.4°F என குறித்துக் கொள்கிறார். மேலும் 2 மணி நேரம் கழித்து வெப்ப நிலை அளவை 91.4°F எனக் காண்கிறார். அறையின் வெப்ப நிலை அளவு (நிலையானது) 72°F எனில், இறந்த நேரத்தைக் கணக்கிடு.(ஒரு மணித உடலின் சாதாரண வெப்ப நிலை அளவு 98.6°F எனக் கொள்க.)

$$\left[\log_e \frac{19.4}{21.4} = -0.0426 \times 2.303, \log_e \frac{26.6}{21.4} = 0.0945 \times 2.303 \right]$$

தீர்வு: t எனும் நேரத்தில் உடலின் வெப்ப நிலை T என்க. நியூட்டனின் குளிர்ச்சி விதிப்படி,

$$\frac{dT}{dt} \propto (T - 72) \Rightarrow \frac{dT}{dt} = k(T - 72)$$

$$\Rightarrow T - 72 = ce^{kt} \Rightarrow T = 72 + ce^{kt}$$

$$t = 0 \text{ எனில் } T = 93.4 \Rightarrow 93.4 = 72 + ce^0$$

$$\Rightarrow c = 93.4 - 72 = 21.4 \Rightarrow T = 72 + 21.4e^{kt}$$

$$t = 120 \text{ எனில் } T = 91.4 \Rightarrow 91.4 = 72 + 21.4e^{120k}$$

$$\Rightarrow 19.4 = 21.4e^{120k} \Rightarrow e^{120k} = \frac{19.4}{21.4}$$

$$\Rightarrow 120k = \log_e \left(\frac{19.4}{21.4} \right)$$

$$\Rightarrow k = \frac{1}{120} \log_e \left(\frac{19.4}{21.4} \right) = \frac{1}{120} (-0.0426 \times 2.303)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{k} = -120 \left(\frac{1}{0.0426 \times 2.303} \right)$$

t_1 என்பது இறந்த நேரத்திற்குப் பின் காலை 10.00 மணிக்கு உள்ளான நேரம் என்க.

$$t = t_1 \text{ எனும் போது } T = 98.6 \Rightarrow 98.6 = 72 + 21.4e^{kt_1}$$

$$\Rightarrow 98.6 - 72 = 21.4e^{kt_1} \Rightarrow e^{kt_1} = \frac{26.6}{21.4}$$

$$\Rightarrow kt_1 = \log_e \left(\frac{26.6}{21.4} \right) = 0.0945 \times 2.303$$

$$t_1 = \frac{1}{k} (0.0945 \times 2.303) = \frac{-120 \times 0.0945 \times 2.303}{0.0426 \times 2.303} \approx -266$$

மணி	t	T
10.00	0	93.4
12.00	120	91.4
?	?	98.6

பனிரெண்டாம் வகுப்பு – கணிதவியல் வினா விடை

காலை 10.00 மணிக்கு முன்பு சுமார் 266 நிமிடங்களுக்கு முன்பு இறப்பு நேர்ந்திருக்கும். அதாவது சுமார் 4 மணி 26 நிமிடங்கள் இறந்த நேரம் தோராயமாக அதிகாலை 5:34

15. ஒரு நோயாளியின் சிறுநீரிலிருந்து வேதிப்பொருள் வெளியேறும் அளவினை தொடர்ச்சியாக கேத்தேடர் என்ற கருவியின் மூலம் கண்காணிக்கப்படுகிறது. $t = 0$ என்ற நேரத்தில் நோயாளிக்கு 10 மிகிராம் வேதிப்பொருள் கொடுக்கப்படுகிறது. இது $-3t^{\frac{1}{2}}$ மிகிராம்/மணி என்னும் வீதத்தில் வெளியேறுகிறது எனில்,

(i) நேரம் $t > 0$ எனும் போது நோயாளியின் உடலிலுள்ள வேதிப்பொருளின் அளவைக் காணும் பொதுச் சமன்பாடு என்ன?

(ii) முழுமையாக வேதிப்பொருள் வெளியேற எடுத்துக் கொள்ளும் குறைந்தபட்ச கால அளவு என்ன?

தீர்வு: (i) t எனும் நேரத்தில் வேதிப்பொருளின் எடை A என்க.

வேதிப்பொருள் வெளியேறும் வீதம் $= -3t^{\frac{1}{2}}$

$$\frac{dA}{dt} = -3t^{\frac{1}{2}} \Rightarrow dA = -3t^{\frac{1}{2}} dt$$

$$\int dA = \int -3t^{\frac{1}{2}} dt$$

$$A = -3 \frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c = -3 \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = -2t^{\frac{3}{2}} + c$$

$t = 0$ எனில் $A = 10 \Rightarrow c = 10$

$$A(t) = 10 - 2t^{\frac{3}{2}}$$

(ii) $A = 0$ எனில் வேதிப்பொருள் முழுமையாக வெளியேறி விட்டது எனப் பொருள்.

$$0 = 10 - 2t^{\frac{3}{2}} \Rightarrow 10 = 2t^{\frac{3}{2}} \Rightarrow 5 = t^{\frac{3}{2}}$$

$$t^3 = 5^2 = 25 \Rightarrow t = 2.9$$

முழுமையாக வேதிப்பொருள் வெளியேற எடுத்துக் கொள்ளும் குறைந்தபட்ச கால அளவு 2.9 மணி.

குனிநிலை கணக்கியல்

பிரிவு – அ வினா விடைகள்

வினா எண்	வினா	விடை
1	கீழ்க்கண்டவற்றுள் எவை கூற்றுக்கள்? (i) கடவுள் உன்னை ஆசீர்வதிக்கட்டும் (ii) ரோசா ஒரு பூ (iii) பாலின் நிறம் வெண்மை (iv) 1 ஒரு பகர எண்	(ii), (iii), (iv)
2	ஒரு கூட்டுக் கூற்று மூன்று தனிச்சுற்றுகளைக் கொண்டதாக இருப்பின், மெய்யட்டவணையிலுள்ள நிரைகளின் எண்ணிக்கை	8
3	p யின் மெய்மதிப்பு T மற்றும் q இன் மெய்மதிப்பு F எனில் பின்வருவனவற்றில் எவை மெய்மதிப்பு T என இருக்கும்? (i) $p \vee q$ (ii) $\sim p \vee q$ (iii) $p \vee \sim q$ (iv) $p \wedge \sim q$	(i), (iii), (iv)
4	$\sim [p \wedge (\sim q)]$ ன் மெய் அட்டவணையில் நிரைகளின் எண்ணிக்கை	4
5	நிபந்தனைக் கூற்று $p \rightarrow q$ க்குச் சமனமானது	$\sim p \vee q$
6	பின்வருவனவற்றுள் எது மெய்மையாகும்?	$p \vee \sim p$
7	பின்வருவனவற்றுள் எது முரண்பாடாகும்?	$p \wedge \sim p$
8	$p \leftrightarrow q$ க்குச் சமனமானது	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
9	கீழ்க்கண்டவற்றில் எது R இல் சுருறுப்புச் செயலி அல்ல?	$a * b = \sqrt{ab}$
10	சமனியுடைய அரைக்குலம். குலமாவதற்கு பூர்த்தி செய்ய வேண்டிய விதியாவது.	எதிர்மறை விதி
11	கீழ்க்கண்டவற்றுள் எது குலம் அல்ல?	(Z, \cdot)
12	முழுக்களில் $*$ என்ற சுருறுப்புச் செயலி $a * b = a + b - ab$ என வரையறுக்கப்படுகிறது எனில் $3 * (4 * 5)$ இன் மதிப்பு	25
13	$(Z_9, +_9)$ இல் $[7]$ இன் வரிசை	9
14	பெருக்கலைப் பொறுத்து குலமாகிய ஒன்றின் முப்படி மூலங்களில், ω^2 இன் வரிசை	3
15	$[3]_{+11} ([5]_{+11} [6])$ இன் மதிப்பு	$[3]$
16	மெய்யெண்களின் கணம் R இல் $*$ என்ற சுருறுப்புச் செயலி $a * b = \sqrt{a^2 + b^2}$ என வரையறுக்கப்படுகிறது எனில் $(3 * 4) * 5$ இன் மதிப்பு	$5\sqrt{2}$

வினா எண்	வினா	விடை
17	பெருக்கல் விதியைப் பொறுத்து குலமாகிய ஒன்றின் நூலாம் மூலங்களில். $-i$ இன் வரிசை	4
18	கீழ்க்கண்டவற்றுள் எது சரி? (1) ஒரு குலத்தின் ஒரு உறுப்பிற்கு ஒன்றிற்கு மேற்பட்ட எதிர்மறை உண்டு. (2) குலத்தின் ஒவ்வொரு உறுப்பும் அதன் எதிர்மறையாக இருக்குமெனில் அக்குலம் ஒரு எயீலியன் குலமாகும். (3) மெய்யெண்களை உறுப்பு களாகக் கொண்ட எல்லா 2×2 அணிக்கோவைகளும் பெருக்கல் விதியில் குலமாகும். (4) எல்லா $a, b \in G$ க்கும் $(a * b)^{-1} = a^{-1} * b^{-1}$.	குலத்தின் ஒவ்வொரு உறுப்பும் அதன் எதிர்மறையாக இருக்குமெனில் அக்குலம் ஒரு எயீலியன் குலமாகும்.
19	பெருக்கலை பொறுத்து குலமாகிய ஒன்றின் n ஆம் படி மூலங்களில் ω^k இன் எதிர்மறை ($k < n$)	ω^{n-k}
20	முழுக்களில் * என்ற நுறுப்புச் செயலி $a * b = a + b - 1$ என வரையறுக்கப்படுகிறது எனில் சமனி உறுப்பு	1

பிரிவு ஆ வினா விடைகள்

1. குலத்தின் நீக்கல் விதிகளை எழுதி, நிறுவுக.

G ஒரு குலம் என்க. $a, b, c \in G$ என்க.

(i) $a * b = a * c \Rightarrow b = c$ (இடது நீக்கல் விதி)

(ii) $b * a = c * a \Rightarrow b = c$ (வலது நீக்கல் விதி)

நிரூபணம் :

$$\begin{aligned} a * b &= a * c \Rightarrow a^{-1} * (a * b) = a^{-1} * (a * c) \\ &\Rightarrow (a^{-1} * a) * b = (a^{-1} * a) * c \\ &\Rightarrow e * b = e * c \Rightarrow b = c \\ b * a &= c * a \Rightarrow (b * a) * a^{-1} = (c * a) * a^{-1} \\ &\Rightarrow b * (a * a^{-1}) = c * (a * a^{-1}) \\ &\Rightarrow b * e = c * e \Rightarrow b = c \end{aligned}$$

2. குலத்தில், எதிர்மறையின் போதான திருப்புதல் விதியினை எழுதி, நிறுவுக.

G ஒரு குலம் என்க. $a, b \in G$ என்க, அவ்வாறாயின்.

$$(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$$

நிரூபணம் :

$b^{-1} * a^{-1}$ ஆனது $(a * b)$ -இன் எதிர்மறை எனக் காட்டினால் போதுமானது.

$$\begin{aligned} (a * b) * (b^{-1} * a^{-1}) &= a * (b * b^{-1}) * a^{-1} \\ &= (a * e) * a^{-1} = a * a^{-1} = e \\ (b^{-1} * a^{-1}) * (a * b) &= b^{-1} * (a^{-1} * a) * b \\ &= (b^{-1} * e) * b = b^{-1} * b = e \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore a * b \text{ இன் எதிர்மறை } & b^{-1} * a^{-1} \\ \Rightarrow (a * b)^{-1} &= b^{-1} * a^{-1} \end{aligned}$$

3. $(Z_6, +_6)$ என்ற குலத்தில் உள்ள ஒவ்வொரு உறுப்புக்கும் வரிசையைக் காண்க .

தீர்வு : $Z_6 = \{ [0], [1], [2], [3], [4], [5] \}$

சமனி உறுப்பு $[0]$ மற்றும் $[6] = [12] = [18] = [0]$

உறுப்பு	விளக்கம்	வரிசை
[0]	சமனி உறுப்பு	1
[1]	[1] ஐ குறைந்த பட்சம் 6 தடவைகள் கூட்டினால் $[6] = [0]$ கிடைக்கும்	6
[2]	[2] ஐ குறைந்த பட்சம் 3 தடவைகள் கூட்டினால் $[6] = [0]$ கிடைக்கும்	3
[3]	[3] ஐ குறைந்த பட்சம் 2 தடவைகள் கூட்டினால் $[6] = [0]$ கிடைக்கும்	2
[4]	[4] ஐ குறைந்த பட்சம் 3 தடவைகள் கூட்டினால் $[12] = [0]$ கிடைக்கும்	3
[5]	[5] ஐ குறைந்த பட்சம் 6 தடவைகள் கூட்டினால் $[30] = [0]$ கிடைக்கும்	6

4. $(\sim p) \wedge (\sim q)$ இன் மெய் அட்டவணை அமைக்க.

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$(\sim p) \wedge (\sim q)$
T	T	F	F	F
T	F	F	T	F
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T

5. $\sim ((\sim p) \wedge q)$ இன் மெய் அட்டவணை அமைக்க.

p	q	$\sim p$	$(\sim p) \wedge q$	$\sim((\sim p) \wedge q)$
T	T	F	F	T
T	F	F	F	T
F	T	T	T	F
F	F	T	F	T

6. $(p \vee q) \wedge (\sim q)$ இன் மெய் அட்டவணை அமைக்க.

p	q	$p \vee q$	$\sim q$	$(p \vee q) \wedge (\sim q)$
T	T	T	F	F
T	F	T	T	54T
F	T	T	F	F
F	F	F	T	F

7. $\sim[(\sim p) \wedge (\sim q)]$ இன் மெய் அட்டவணை அமைக்க.

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$(\sim p) \wedge (\sim q)$	$\sim[(\sim p) \wedge (\sim q)]$
T	T	F	F	F	T
T	F	F	T	F	T
F	T	T	F	F	T
F	F	T	T	T	F

8. $(p \vee q) \wedge r$ இன் மெய் அட்டவணை அமைக்க.

p	q	r	$p \vee q$	$(p \vee q) \wedge r$
T	T	T	T	T
T	T	F	T	F
T	F	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	T	T	T
F	T	F	T	F
F	F	T	F	F
F	F	F	F	F

9. $(p \wedge q) \vee (\sim r)$ இன் மெய் அட்டவணை அமைக்க.

p	q	r	$p \wedge q$	$\sim r$	$(p \wedge q) \vee \sim r$
T	T	T	T	F	T
T	T	F	T	T	T
T	F	T	F	F	F
T	F	F	F	T	T
F	T	T	F	F	F
F	T	F	F	T	T
F	F	T	F	F	F
F	F	F	F	T	T

10. $(p \vee q) \vee r$ இன் மெய் அட்டவணை அமைக்க.

p	q	r	$p \vee q$	$(p \vee q) \vee r$
T	T	T	T	T
T	T	F	T	T
T	F	T	T	T
T	F	F	T	T
F	T	T	T	T
F	T	F	T	T
F	F	T	F	T
F	F	F	F	F

11. $(p \wedge q) \vee r$ இன் மெய் அட்டவணை அமைக்க.

p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \vee r$
T	T	T	T	T
T	T	F	T	T
T	F	T	F	T
T	F	F	F	F
F	T	T	F	T
F	T	F	F	F
F	F	T	F	T
F	F	F	F	F

12. $p \vee \sim q$ இன் மெய் அட்டவணை அமைக்க.

p	q	$\sim q$	$p \vee (\sim q)$
T	T	F	T
T	F	T	T
F	T	F	F
F	F	T	T

13. $(\sim p) \vee (\sim q)$ இன் மெய் அட்டவணை அமைக்க.

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$(\sim p) \vee (\sim q)$
T	T	F	F	F
T	F	F	T	T
F	T	T	F	T
F	F	T	T	T